UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"

Qual a dimensão do movimento browniano?

Diogo Ricardo da Costa

Rio Claro, novembro de 2007.

Qual a dimensão do movimento Browniano?

Por meio deste trabalho, visamos determinar qual a dimensão do movimento browniano. Segue-se uma breve descrição do que vem a ser este movimento, onde podemos encontrá-lo, e como determinar a dimensão deste através de exemplos práticos.

1 - Introdução

Entende-se por movimento browniano o movimento aleatório de um ente físico, do qual não podemos descrever matematicamente sua posição em função do tempo. O caminho percorrido por uma curva browniana é irregular e também altamente imprevisível, o que torna a localização de uma partícula neste movimento extremamente difícil e às vezes impossível.

2- Curvas brownianas em 1 dimensão

O movimento se dará apenas em uma única direção, vamos supor que uma partícula animada possa se mover ao longo do eixo x de um plano cartesiano. Esta iniciará seu movimento na posição x = 0 (t = 0). Tal partícula poderá se locomover em dois sentidos: na direção dos x positivos (x > 0) ou dos x negativos (x < 0). Como esquematizado na figura 1.

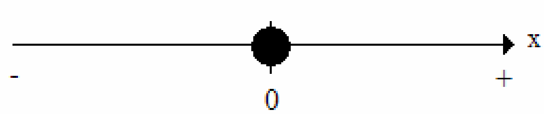

Figura 1 – esquema mostrando uma partícula que pode se mover em apenas uma dimensão.

A figura 1 mostra um esboço básico de como é o movimento browniano em uma dimensão. Em duas dimensões o movimento é análogo ao descrito, mas a partícula pode se mover também na direção de um eixo y

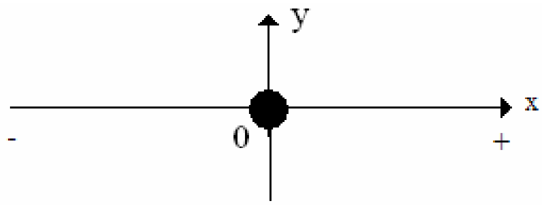

Figura 2 – esquema mostrando uma partícula que pode se mover em duas dimensões.

No início do século XX, Louis Bachelier observou que o mercado de ações tinha aspecto visual muito semelhante ao movimento browniano em 1 dimensão, conforme a figura abaixo [1]. A semelhança visual é realmente grande e impressionante, por isso é natural que uma análise superficial conduza à conclusão ingênua de que a variação de preços no mercado é descrita por movimentos brownianos. Mas uma análise mais séria revela que tal hipótese é totalmente desprovida de fundamento.

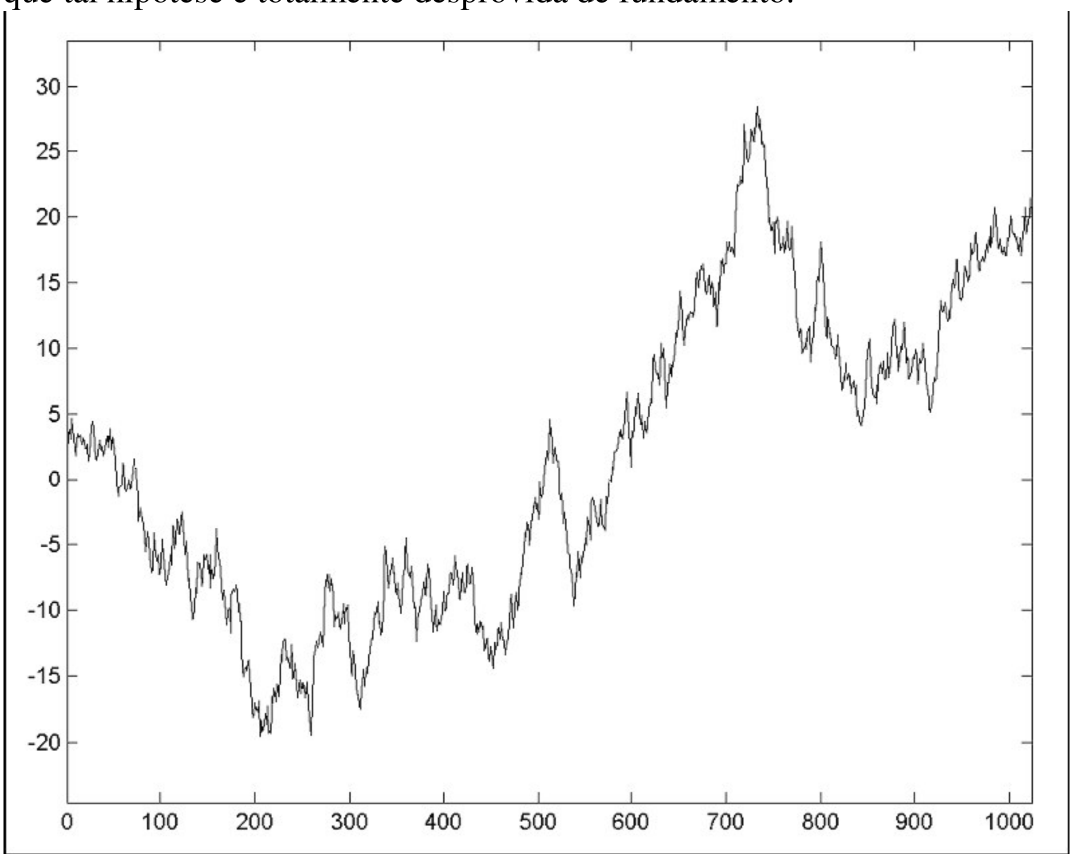

Figura 3 – Gráfico das ações de uma bolsa de valores.

Podemos caracterizar um processo fractal como o mostrado abaixo:

$$y[t] = \left(\frac{1}{\lambda^H}\right) y[\lambda.t] \tag{1}$$

onde H é o coeficiente de Hurst, e λ é um número constante e maior do que zero.

Um movimento Browniano possui o coeficiente de Hurst H=1/2 [2]. Logo, podemos reescrever a equação (1) da seguinte forma

$$y[t] = \left(\frac{1}{\lambda^{1/2}}\right) y[\lambda.t] \tag{2}$$

que é a equação para um movimento browniano que nos possibilita obter curvas de *y* em função do tempo.

Mandelbrot em seus trabalhos, demonstrou que o coeficiente de Hurst das curvas obtidas com ações na bolsa de valores tem valores diferentes de 1/2, o que comprova que ações (como mostramos na figura 3) não necessariamente seguem um padrão browniano.

Mais abaixo, mostraremos como obter curvas brownianas de forma correta, e como calcular as suas dimensões.

3- Curvas brownianas em 2 dimensões

O matemático Nobert Wiener demonstrou que a curva browniana tem comprimento infinito. O caminho traçado por uma partícula é tão enrolado que, se esperássemos um tempo infitamente longo, ela percorreria todo o plano, sem deixar de passar por nenhum ponto. Tecnicamente se diz que, contrariando as aparências, o caminho percorrido pela partícula browniana não é uma linha, mas é uma superfície, e com isso, podemos afirmar que a dimensão deste movimento é igual a 2 [3].

4 – Como desenhar tais curvas

Um exemplo de movimento Browniano pode ser encontrado no site: http://www.mscf.uky.edu/~mai/java/stat/brmo.html [4] que contem um applet que mostra em 1 e 2 dimensões o comportamento das curvas brownianas. Na figura 2 iremos mostrar um screenshot desta página da internet. No quadro a esquerda desta figura, observamos o comportamento de uma curva browniana em duas dimensões depois de certo tempo qualquer, e na direita o de uma curva browniana em 1 dimensão.

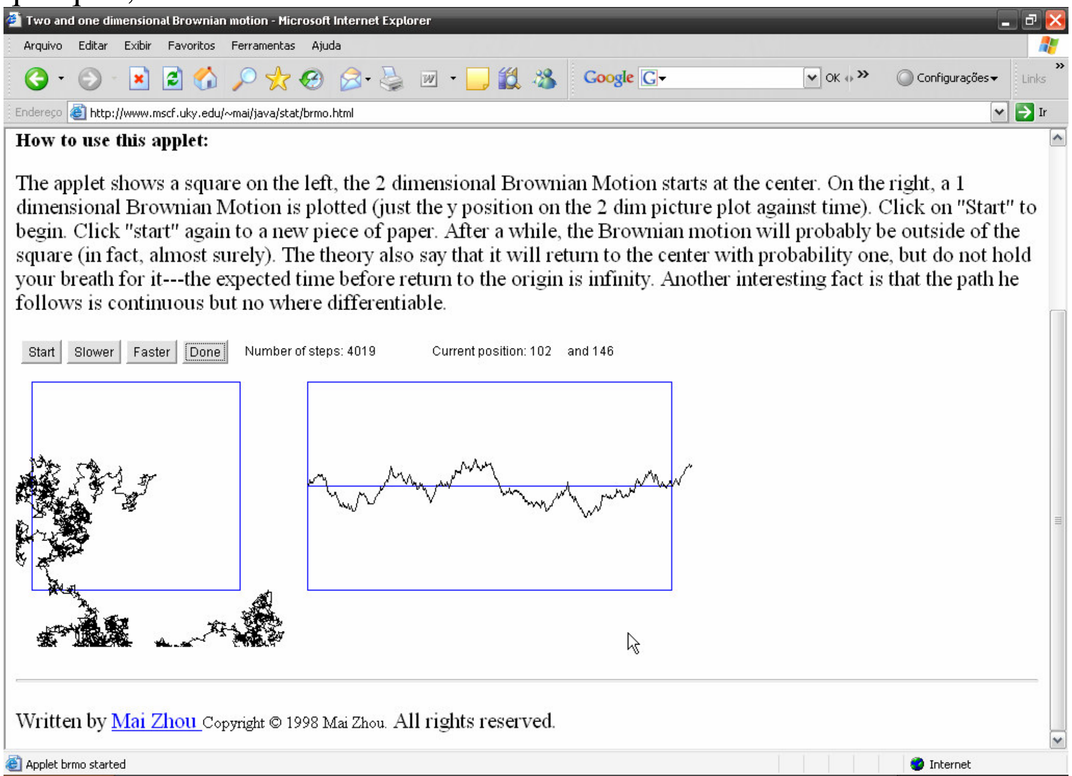

Figura 2 – Screenshot da página http://www.mscf.uky.edu/~mai/java/stat/brmo.html

Um exemplo utilizando o programa Mathematica 5.2 para obtenção dos gráficos em duas e três dimensões pode ser visto na referência [5].

4.1 - Uma dimensão

Utilizando o programa Mathematica 5.2, podemos fazer um esboço do gráfico de uma partícula efetuando movimento browniano em 1 dimensão. O gráfico que queremos obter é o de posição em função do tempo, como o mostrado a logo depois de apresentarmos os comandos necessários para a obtenção do gráfico 3.

```
n=100000;
lista=(inicial=0;Table[inicial=inicial+Random[Real,{-100,100}],{n}]);
```

```
ListPlot[lista, PlotJoined->True,PlotRange□All]
```

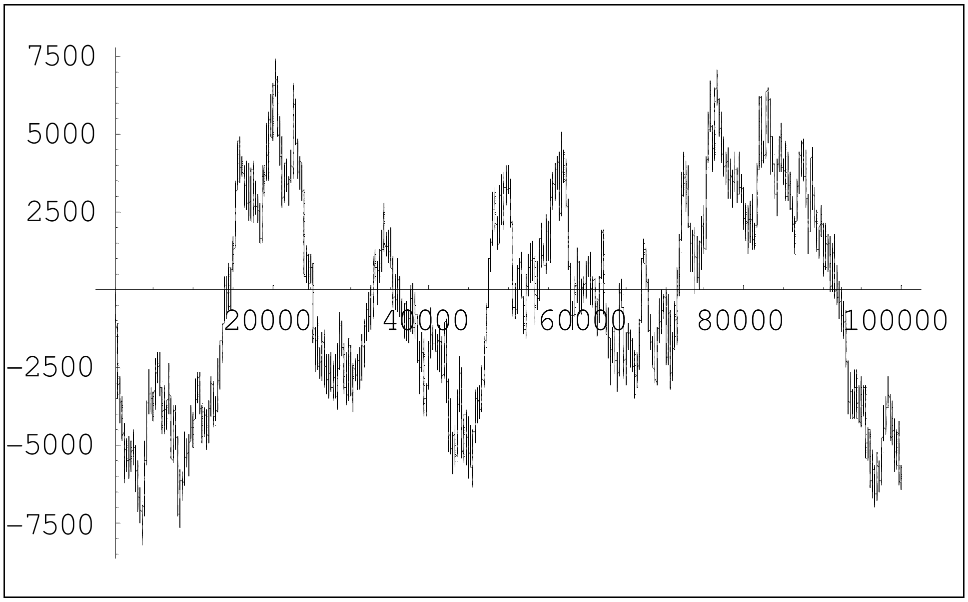

Gráfico 3 – Movimento browniano em 1 dimensão. Gráfico da posição em função do tempo (as escalas só servem de auxílio, não tivemos rigor matemático em sua obtenção)

O movimento da partícula mostrada no gráfico 3 é auto-afim e não auto-similar, ou seja, as dimensões nas escalar horizontais e verticais não são proporcionais na medida em que mexemos na amplificação do gráfico. Logo, o método de contagem de caixas "box-conting" não se aplica para podermos calcular a dimensão fractal desta séries ditas séries temporais.

Quando os fractais são auto-similares (um único fator de escala para as direções vertical e horizontal), como a curva de Koch, ou estatisticamente auto-similares, a costa de uma ilha, usamos a dimensão de similaridade ou "box-counting" para caracterizá-los. Mas na Natureza temos também os fractais com a propriedade de auto-afinidade (escalas diferentes para as direções vertical e horizontal). Como exemplos de figuras auto-afins, podemos citar o movimento browniano ou o formato de uma montanha.

4.2 – Duas dimensões

O programa a seguir é um exemplo de randon walk em duas dimensões [6], que nada mais é que um exemplo de movimento browniano.

Iremos deixar os comandos necessários para a obtenção do gráfico para que qualquer pessoa possa reproduzir a figura 3. Note que o número de passos utilizados (*n*) é de 5000, mas o valor de *n* pode ser alterado na medida em que se fizer necessário.

```
doisPi=N[2Pi];
RandomWalk2D[N_]:=Module[{l={{0,0}},x={0,0},i=0,th},
   Do[
     u=doisPi Random[];
     x+={Cos[th],Sin[u]};
     l=Append[l,x],
     {N}
   ];
   l
 ]
```

```
n=5000
rw=RandomWalk2D[n];
 Show[Graphics[{Line[rw],{PointSize[.005],Point[rw[[-1]]]}},Axes-
 >False],AspectRatio->Automatic]
```

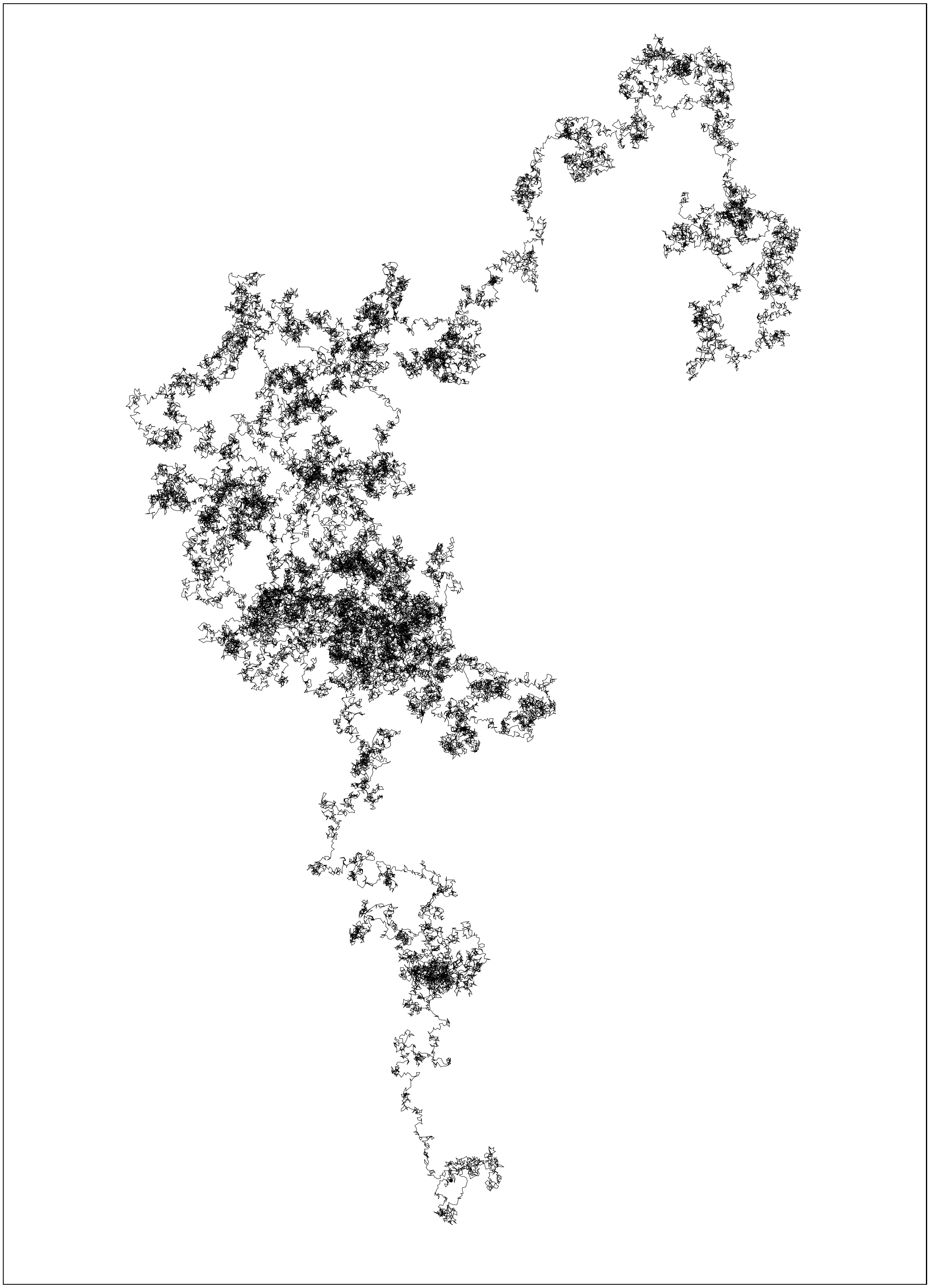

Figura 3 – Gráfico de um movimento browniano com n passos.

5 – Cálculos das dimensões das curvas

5.1 – Uma dimensão

Para um processo auto-afim, a dimensão [2] pode ser dada por:

$$\boldsymbol{D = 2 - H} \qquad (4)$$

onde *H* é o valor do expoente de Hurst.

Queremos a dimensão do movimento browniano com H=1/2, logo a dimensão deste é:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{D} &= \mathbf{2 - 1/2} \\ \boldsymbol{D} &= \mathbf{1{,}5} \end{aligned} \qquad (5)$$

Outros valores para a dimensão D podem ser encontrados na medida em que analisamos movimentos brownianos fracionários (fbm), para o leitor interessado, vale a pena tentar buscar formas de obter e caracterizar tais curvas.

5.2 – Duas dimensões

Utilizamos o software Fractal Dimension para podermos obter a dimensão da curva obtida na figura 4, e obtemos de acordo com o screenshot tirado do programa que a dimensão da curva é 1.589 (ver figura 4). Vale frisar que na medida em que aumentamos o número de passos (*n*), maior será a dimensão da curva obtida, e no limite, quando o número de passos tende ao infinito, a dimensão tende a 2, pois a curva irá preencher totalmente o plano.

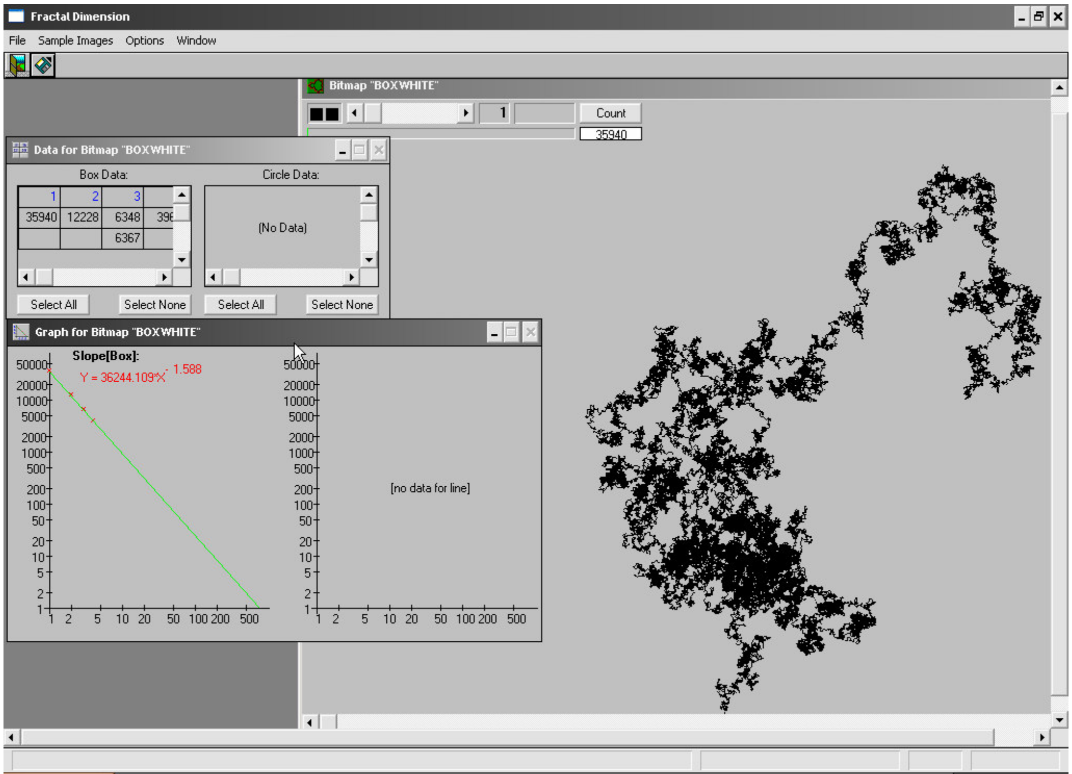

Figura 4 – Screenshot do programa Fractal Dimension utilizado para obtermos a dimensão de figuras planas.

Conclusões:

A partir de tudo o que fora exposto neste trabalho, concluímos que um movimento browniano em uma dimensão é caracterizado por ter um coeficiente de Hurst H=1/2, e também que a sua dimensão é 1,5. Os movimentos browniano em duas dimensões tem por grande característica o fato de que quando o número de passos tende a infinito, a dimensão é 2, pois a curva irá preencher o plano totalmente.

Referências Bibliográficas:

[1] Hindemburg Melão Jr., Revisão da fórmula de Black & Scholes
[2] José Roberto Campanha, Sistemas Complexos e Aplicações, tese de livre docência, UNESP, Rio Claro.
[3] http://www.seara.ufc.br/especiais/fisica/brown/brown8.htm
[4] http://www.mscf.uky.edu/~mai/java/stat/brmo.html
[5]Introduction to Programming with Mathematica, 3rd edição, Universidade de Cambridge, 2004
[6] Eric W. Weisstein, http://mathworld.wolfram.com/RandomWalk2-Dimensional.html, 10 de Julho de 2003.
[7] http://www.doc.ic.ac.uk/~nd/surprise_95/journal/vol4/ykl/report.html
[8] http://classes.yale.edu/Fractals/RandFrac/Brownian/Brownian.html

Agradecimentos:

Agradecemos ao Prof. Dr. José Roberto Campanha pelo auxílio na realização deste trabalho e a paciência e dedicação mostradas nas aulas do curso optativo sistemas complexos e fractais do ano de 2007.

Dúvidas, críticas, sugestões e/ou correções
podem ser enviadas para o e-mail:

diogo_cost@hotmail.com

Rio Claro, novembro de 2007.